الموضوع: المحاضرة ~~الثالثة~~ الثانية...

* الصفوف المولِّدة والصفوف المولَّدة:

- إذا كان لدينا مجموعة $X \neq \emptyset$ وصف جزئي $H \subset 2^X$
فإن صف H: قد يشكل حلقة أو جبر - سيغما حلقة...
وقد لا يشكل أي من الصفوف المدروسة سابقاً.

- ولكن من صف H هذا يمكننا الحصول على حلقة أو سيغما حلقة أو جبر أو صف جبر أو صف مطرد أو صف دينكي.
وعند حصولنا على الصف المطلوب: سيغما
أما الصف الناتج فنسميه الصف المولد من الصف H.

- فيما يلي نعتبر أن X صف غير خالي $X \neq 0$ و 2^X صف كل المجموعات في X.
ونرمز بـ Λ بمجموعة أدلة. (قد تكون منتهية أو غير منتهية).

مبرهنة:

تقاطع أية أسرة من الحلقات على X هو أيضاً حلقة على X (وكذلك تقاطع أية أسرة من الجبور).

الإثبات:

لتكن $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ أسرة من الحلقات على X.
ولنثبت أن: $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ حلقة على X.

R حلقة $\iff A \cup B , A \setminus B \in R$

ولتكن $A, B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ هذا يعني أن $A, B \in R_\lambda$ من أجل كل $\lambda \in \Lambda$
وبما أن R_λ حلقة بالفرض فإن: $A \cup B \in R_\lambda$ وكذلك
$A , B \in R_\lambda$ من أجل $\lambda \in \Lambda$ لذلك يكون:

$$A \cup B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \quad , \quad A \setminus B \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$$

وهذا يعني أن $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ حلقة على X.

الآن: لتكن $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ أسرة الجبور على X.

بحسب ما تقدم فإن: $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ حلقة على X.

وبما أن A_λ جبر فإن:

$X \in A_\lambda$ مهما كان $\lambda \in \Lambda$

وبالتالي $X \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

أي أن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ جبر على X.

وبشكل مشابه يمكن إثبات ما يلي:

مبرهنة 2:

1) تقاطع أية أسرة من σ-الحلقات على X هو σ-حلقة على X.

2) تقاطع أية أسرة من σ-الجبور على X هو σ-جبر على X.

3) تقاطع أية أسرة من صفوف دنكين على X هو دنكين على X.

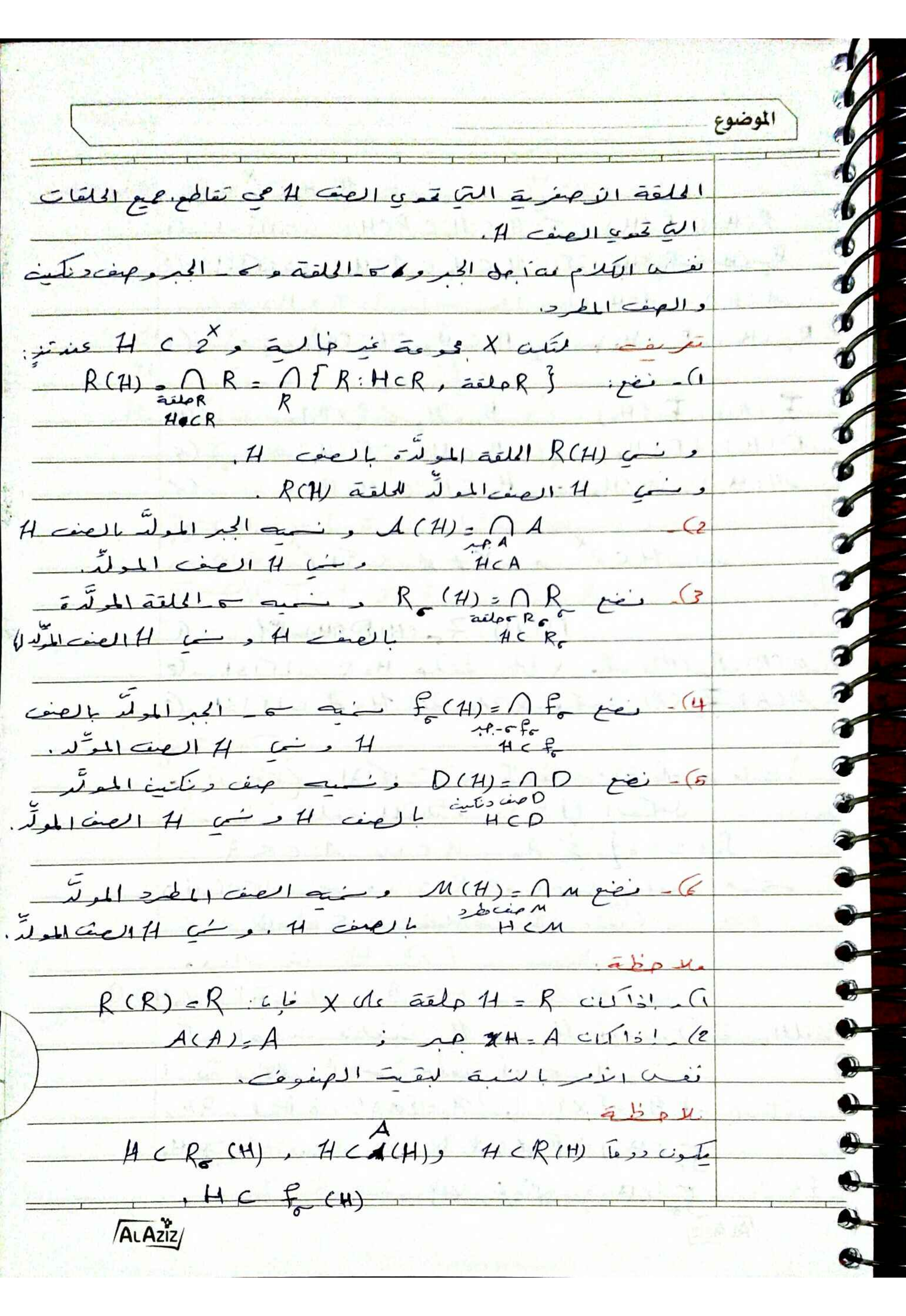
4) تقاطع أية أسرة من الصفوف المطردة هو صف مطرد.

5) تقاطع نصفي حلقة على X ليس بالضرورة نصف حلقة على X (نفس الشيء بالنسبة لأنصاف الجبور).

ملاحظة:

من أجل كل صف $H \subset 2^X$ يوجد على الأقل حلقة أو σ-حلقة أو جبر أو σ-جبر يحوي هذا الصف H فمثلاً 2^X، والبحث عن أصغر حلقة (أو σ-حلقة أو σ-جبر يحوي الصف H).

هذا الصف الأصغر نسميه الحلقة المولدة بالصف H أو σ-الجبر المولد بالصف H). ونسمي H الصف المولد.



الموضوع ....

الحلقة الأصغرية التي تحوي الصف H هي تقاطع جميع الحلقات التي تحوي الصف H.

نفس الكلام بالنسبة للجبر و σ-الحلقة و σ-الجبر وصف دنكين والصف المطرد.

تعريف: لتكن X مجموعة غير خالية و $H \subset 2^X$ عندئذٍ:

1- نضع: $R(H) = \bigcap_{\substack{R \text{ حلقة} \\ H \subset R}} R = \bigcap_{R} \{R : H \subset R ,\ R \text{ حلقة}\}$

ونسمي $R(H)$ الحلقة المولدة بالصف H.

ونسمي H الصف المولد للحلقة $R(H)$.

2- $A(H) = \bigcap_{\substack{A \text{ جبر} \\ H \subset A}} A$ ونسميه الجبر المولد بالصف H ونسمي H الصف المولد.

3- نضع $R_\sigma(H) = \bigcap_{\substack{R_\sigma \ \sigma\text{-حلقة} \\ H \subset R_\sigma}} R_\sigma$ ونسميه σ-الحلقة المولدة بالصف H ونسمي H الصف المولد لها

4- نضع $\mathcal{F}_\sigma(H) = \bigcap_{\substack{\mathcal{F}_\sigma \ \sigma\text{-جبر} \\ H \subset \mathcal{F}_\sigma}} \mathcal{F}_\sigma$ نسميه σ-الجبر المولد بالصف H ونسمي H الصف المولد.

5- نضع $D(H) = \bigcap_{\substack{D \text{ صف دنكين} \\ H \subset D}} D$ ونسميه صف دنكين المولد بالصف H ونسمي H الصف المولد.

6- نضع $M(H) = \bigcap_{\substack{M \text{ صف مطرد} \\ H \subset M}} M$ ونسميه الصف المطرد المولد بالصف H. ونسمي H الصف المولد.

ملاحظة:

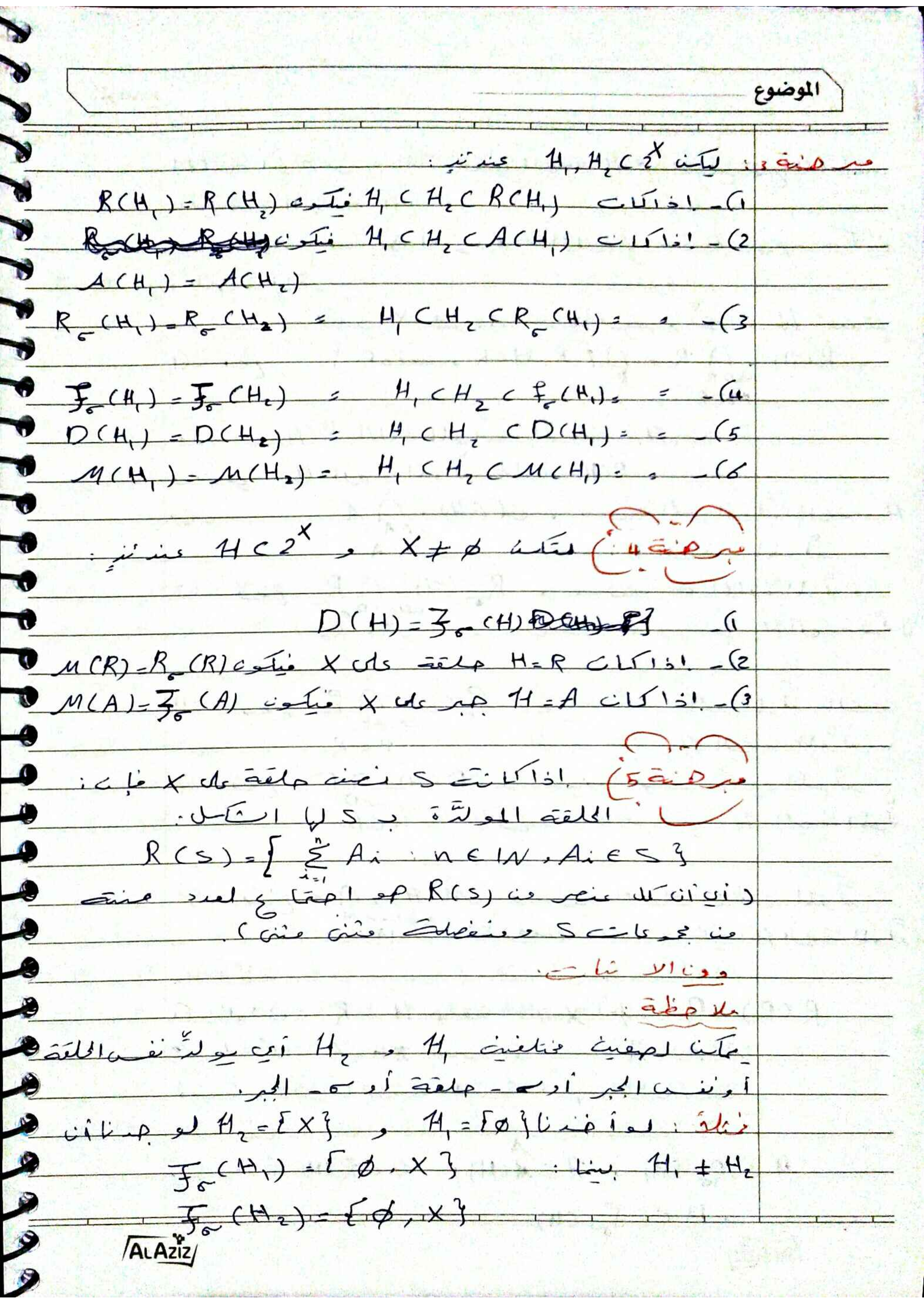
1- إذا كان $H = R$ حلقة على X فإن: $R(R) = R$

2- إذا كان $H = A$ جبر ; $A(A) = A$

نفس الأمر بالنسبة لبقية الصفوف.

ملاحظة:

يكون دوماً $H \subset R(H)$ و $H \subset A(H)$ ، $H \subset R_\sigma(H)$ ، $H \subset \mathcal{F}_\sigma(H)$.



الموضوع

مبرهنة 3: ليكن $H_1, H_2 \subset 2^X$ عندئذ:

1) إذا كان $H_1 \subset H_2 \subset R(H_1)$ فيكون $R(H_1) = R(H_2)$

2) إذا كان $H_1 \subset H_2 \subset A(H_1)$ فيكون $A(H_1) = A(H_2)$

3) " " $H_1 \subset H_2 \subset R_\sigma(H_1)$ " $R_\sigma(H_1) = R_\sigma(H_2)$

4) " " $H_1 \subset H_2 \subset \mathcal{F}_\sigma(H_1)$ " $\mathcal{F}_\sigma(H_1) = \mathcal{F}_\sigma(H_2)$

5) " " $H_1 \subset H_2 \subset D(H_1)$ " $D(H_1) = D(H_2)$

6) " " $H_1 \subset H_2 \subset M(H_1)$ " $M(H_1) = M(H_2)$

مبرهنة 4: لتكن $X \neq \emptyset$ و $H \subset 2^X$ عندئذ:

1) $D(H) = \mathcal{F}_\sigma(H)$

2) إذا كان $H = R$ حلقة على X فيكون $M(R) = R_\sigma(R)$

3) إذا كان $H = A$ جبر على X فيكون $M(A) = \mathcal{F}_\sigma(A)$

مبرهنة 5: إذا كانت S نصف حلقة على X فإن:
الحلقة المولدة ب S لها الشكل:

$$R(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} A_i \;:\; n \in \mathbb{N},\; A_i \in S \right\}$$

(أي أن كل عنصر من $R(S)$ هو اجتماع لعدد منته من مجموعات S ومنفصلة مثنى مثنى).

دون إثبات.

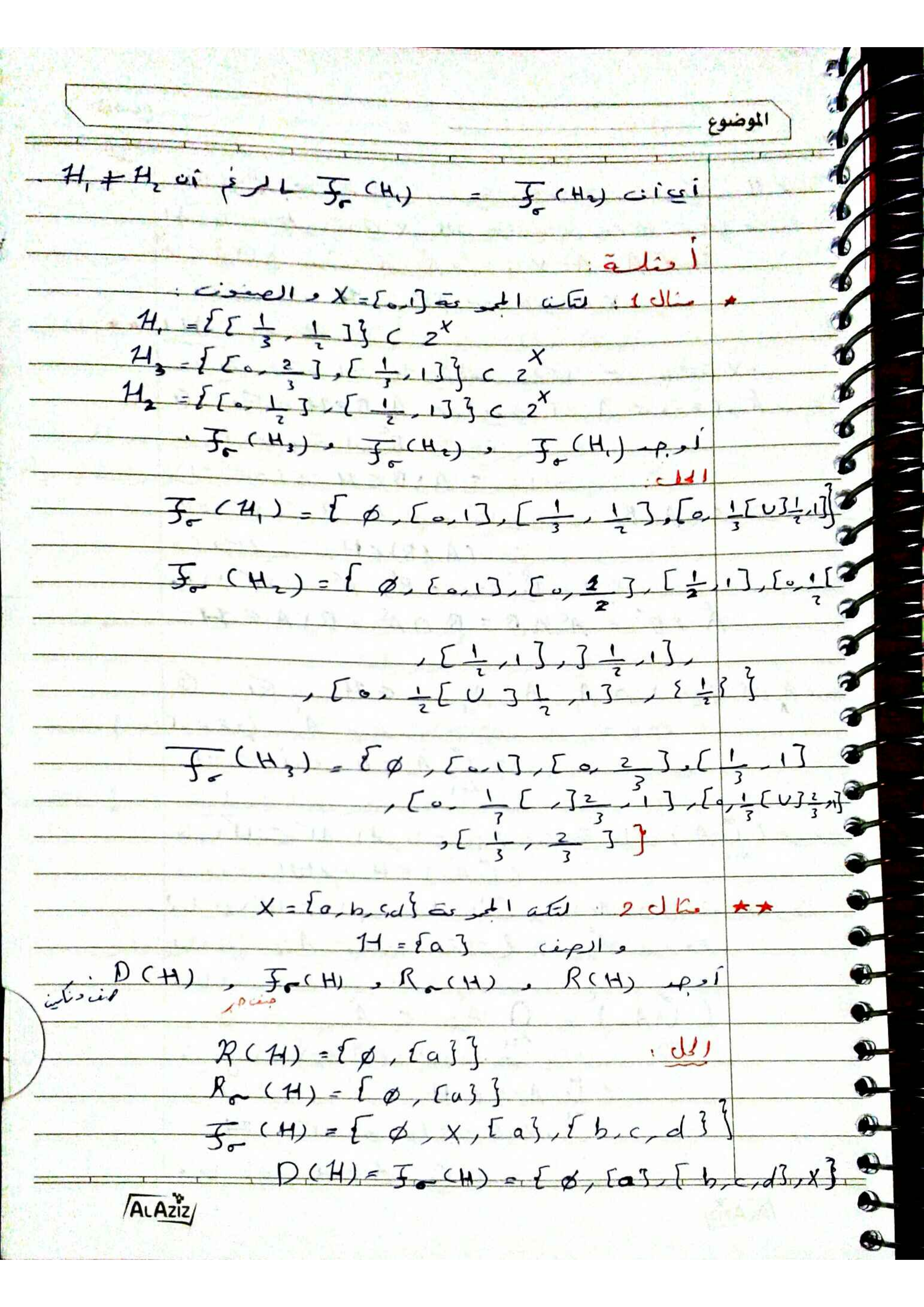
ملاحظة:

يمكن لصفين مختلفين H_1 و H_2 أن يولدا نفس الحلقة أو نفس الجبر أو σ- حلقة أو σ- الجبر.

مثال: لو أخذنا $H_1 = \{\emptyset\}$ و $H_2 = \{X\}$ لوجدنا أن

$\mathcal{F}_\sigma(H_1) = \{\emptyset, X\}$ بينما $H_1 \neq H_2$

$\mathcal{F}_\sigma(H_2) = \{\emptyset, X\}$



أي أن $\mathfrak{F}_\sigma(H_1) = \mathfrak{F}_\sigma(H_2)$ بالرغم أن $H_1 \neq H_2$.

أمثلة :

★ مثال 1 : لتكن المجموعة $X=[0,1]$ و الصفوف :

$H_1 = \{[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]\} \subset 2^X$

$H_3 = \{[0,\frac{2}{3}],[\frac{1}{3},1]\} \subset 2^X$

$H_2 = \{[0,\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},1]\} \subset 2^X$

أوجد $\mathfrak{F}_\sigma(H_1)$ ، $\mathfrak{F}_\sigma(H_2)$ ، $\mathfrak{F}_\sigma(H_3)$.

الحل :

$\mathfrak{F}_\sigma(H_1) = \{\emptyset,[0,1],[\frac{1}{3},\frac{1}{2}],[0,\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{2},1]\}$

$\mathfrak{F}_\sigma(H_2) = \{\emptyset,[0,1],[0,\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},1],[0,\frac{1}{2}[$
$,[\frac{1}{2},1],]\frac{1}{2},1],$
$,[0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1],\{\frac{1}{2}\}\}$

$\mathfrak{F}_\sigma(H_3) = \{\emptyset,[0,1],[0,\frac{2}{3}],[\frac{1}{3},1]$
$,[0,\frac{1}{3}[,]\frac{2}{3},1],[0,\frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3},1]$
$,[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\}$

★★ مثال 2 : لتكن المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$
و الصف $H=\{a\}$

أوجد $R(H)$ ، $R_\sigma(H)$ ، $\mathfrak{F}_\sigma(H)$ (جبر σ) ، $D(H)$ (صف دنكين)

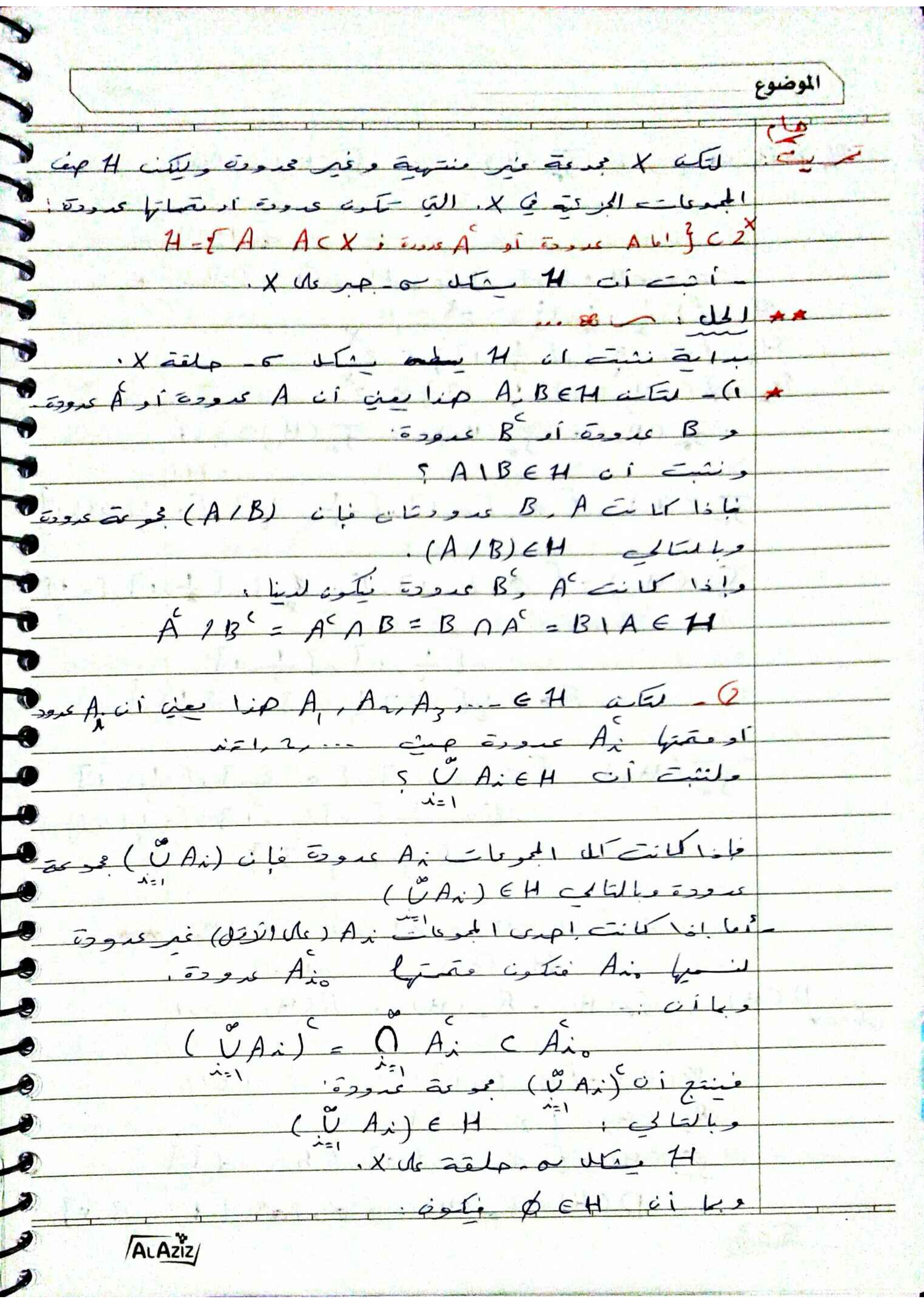
الحل :

$R(H) = \{\emptyset,\{a\}\}$

$R_\sigma(H) = \{\emptyset,\{a\}\}$

$\mathfrak{F}_\sigma(H) = \{\emptyset,X,\{a\},\{b,c,d\}\}$

$D(H) = \mathfrak{F}_\sigma(H) = \{\emptyset,\{a\},\{b,c,d\},X\}$



الموضوع

تمرين مهم

لتكن X مجموعة غير منتهية وغير معدودة وليكن H صف المجموعات الجزئية في X، التي تكون معدودة او متمماتها معدودة:

$$H=\{A : A\subset X \,;\, A^c \text{ معدودة أو } A \text{ معدودة}\}\subset 2^X$$

- أثبت أن H يشكل σ-جبر على X.

الحل: ...

بداية نثبت ان H يشكل σ-حلقة X.

1)- لتكن $A, B\in H$ هذا يعني أن A معدودة أو A^c معدودة و B معدودة أو B^c معدودة.

ونثبت أن $A\setminus B\in H$ ؟

فإذا كانت A، B معدودتان فإن $(A\setminus B)$ مجموعة معدودة وبالتالي $(A\setminus B)\in H$.

وإذا كانت A^c، B^c معدودة يكون لدينا:

$$A^c\setminus B^c = A^c\cap B = B\cap A^c = B\setminus A\in H$$

2)- لتكن $A_1, A_2, A_3, \dots \in H$ هذا يعني أن A_i معدودة أو متممتها A_i^c معدودة حيث $i=1,2,\dots$

ولنثبت أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in H$ ؟

فإذا كانت كل المجموعات A_i معدودة فإن $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ مجموعة معدودة وبالتالي $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\in H$

- أما إذا كانت إحدى المجموعات A_i (على الأقل) غير معدودة لنسميها A_{i_0} فتكون متممتها $A_{i_0}^c$ معدودة.

وبما أن

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \subset A_{i_0}^c$$

فينتج أن $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c$ مجموعة معدودة.

وبالتالي: $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\in H$

H يشكل σ-حلقة على X.

وبما أن $\emptyset\in H$ فيكون: